

Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Final Event 1 (Individual)

香港數學競賽 (2002 – 2003)

決賽項目 1 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 設  $P$  是  $3^{2003} \times 5^{2002} \times 7^{2001}$  的個位數。求  $P$  的值。

Let  $P$  be the units digit of  $3^{2003} \times 5^{2002} \times 7^{2001}$ . Find the value of  $P$ .

2. 若方程  $(x^2 - x - 1)^{x+P-1} = 1$  有  $Q$  個整數解，求  $Q$  的值。

If the equation  $(x^2 - x - 1)^{x+P-1} = 1$  has  $Q$  integral solutions, find the value of  $Q$ .

3. 設  $x, y$  為實數且  $xy = 1$ 。若  $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{Qy^4}$  的最小值是  $R$ ，求  $R$  的值。

Let  $x, y$  be real numbers and  $xy = 1$ . If the minimum value of  $\frac{1}{x^4} + \frac{1}{Qy^4}$  is  $R$ , find the value of  $R$ .

4. 設  $x_R, x_{R+1}, \dots, x_K$  ( $K > R$ ) 為  $K - R + 1$  個不相同的正整數且  $x_R + x_{R+1} + \dots + x_K = 2003$ 。若  $S$  是  $K$  的最大可能的值，求  $S$  的值。

Let  $x_R, x_{R+1}, \dots, x_K$  ( $K > R$ ) be  $K - R + 1$  distinct positive integers and  $x_R + x_{R+1} + \dots + x_K = 2003$ . If  $S$  is the maximum possible value of  $K$ , find the value of  $S$ .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Final Event 2 (Individual)

香港數學競賽 (2002 – 2003)

決賽項目 2 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若一個兩位數  $P$  的 50 次方是一個 69 位數，求  $P$  的值。(已知  $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 11 = 1.0414$ )

If the 50<sup>th</sup> power of a two-digit number  $P$  is a 69-digit number, find the value of  $P$ . (given that  $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 11 = 1.0414$ )

2. 方程式  $x^2 + ax - P + 7 = 0$  的根是  $\alpha$  和  $\beta$ ；而方程式  $x^2 + bx - r = 0$  的根是  $-\alpha$  和  $-\beta$ 。若方程式  $(x^2 + ax - P + 7) + (x^2 + bx - r) = 0$  的正根是  $Q$ ，求  $Q$  的值。

The roots of the equation  $x^2 + ax - P + 7 = 0$  are  $\alpha$  and  $\beta$ , whereas the roots of the equation  $x^2 + bx - r = 0$  are  $-\alpha$  and  $-\beta$ . If the positive root of the equation

$(x^2 + ax - P + 7) + (x^2 + bx - r) = 0$  is  $Q$ , find the value of  $Q$ .

3. 已知  $\triangle ABC$  為一等腰三角形， $AB = AC = \sqrt{2}$  及  $BC$  上有  $Q$  個點  $D_1, D_2, \dots, D_Q$ 。設  $m_i = AD_i^2 + BD_i \times D_iC$ 。若  $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_Q = R$ ，求  $R$  的值。

Given that  $\triangle ABC$  is an isosceles triangle,  $AB = AC = \sqrt{2}$  and  $D_1, D_2, \dots, D_Q$  are  $Q$  points on  $BC$ . Let  $m_i = AD_i^2 + BD_i \times D_iC$ . If  $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_Q = R$ , find the value of  $R$ .

4. 有 2003 個袋從左至右排列。已知最左面的袋裝有  $R$  個球，而且每 7 個相鄰的袋共裝有 19 個球。若最右面的袋有  $S$  個球，求  $S$  的值。

There are 2003 bags arranged from left to right. It is given that the leftmost bag contains  $R$  balls, and every 7 consecutive bags contain 19 balls altogether. If the rightmost bag contains  $S$  balls, find the value of  $S$ .



Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Final Event 3 (Individual)

香港數學競賽 (2002 – 2003)

決賽項目 3 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 已知  $\begin{cases} wxyz = 4 \\ w - xyz = 3 \end{cases}$  且  $w > 0$ 。若  $w$  的解是  $P$ ，求  $P$  的值。

Given that  $\begin{cases} wxyz = 4 \\ w - xyz = 3 \end{cases}$  and  $w > 0$ . If the solution of  $w$  is  $P$ , find the value of  $P$ .

2. 設  $[y]$  表示小數  $y$  的整數部分，如  $[3.14] = 3$ 。若  $\left[(\sqrt{2}+1)^P\right] = Q$ ，求  $Q$  的值。

Let  $[y]$  represents the integral part of the decimal number  $y$ . For example,  $[3.14] = 3$ . If

$\left[(\sqrt{2}+1)^P\right] = Q$ , find the value of  $Q$ .

3. 已知  $x_0y_0 \neq 0$  及  $Qx_0^2 - 22\sqrt{3}x_0y_0 + 11y_0^2 = 0$ 。若  $\frac{6x_0^2 + y_0^2}{6x_0^2 - y_0^2} = R$ ，求  $R$  的值。

Given that  $x_0y_0 \neq 0$  and  $Qx_0^2 - 22\sqrt{3}x_0y_0 + 11y_0^2 = 0$ . If  $\frac{6x_0^2 + y_0^2}{6x_0^2 - y_0^2} = R$ , find the value of  $R$ .

4. 四邊形  $ABCD$  兩對角線  $AC$  和  $BD$  互相垂直。已知  $AB = 5$ ， $BC = 4$ ， $CD = R$ 。若  $DA = S$ ，求  $S$  的值。

The diagonals  $AC$  and  $BD$  of a quadrilateral  $ABCD$  are perpendicular to each other. Given that  $AB = 5$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = R$ . If  $DA = S$ , find the value of  $S$ .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Final Event 4 (Individual)

香港數學競賽 (2002 – 2003)

決賽項目 4 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 如果 9 位數  $\overline{32x35717y}$  是 72 的倍數， $P = xy$ ，求  $P$  的值。

Suppose the 9-digit number  $\overline{32x35717y}$  is a multiple of 72 and  $P = xy$ , find the value of  $P$ .

2. 已知三條直線  $4x + y = \frac{P}{3}$ ， $mx + y = 0$  和  $2x - 3my = 4$  不能構成一個三角形。若  $m > 0$  及  $Q$  是  $m$  的最小可能的值，求  $Q$ 。

Given that the lines  $4x + y = \frac{P}{3}$ ,  $mx + y = 0$  and  $2x - 3my = 4$  cannot form a triangle. Suppose that  $m > 0$  and  $Q$  is the minimum possible value of  $m$ , find  $Q$ .

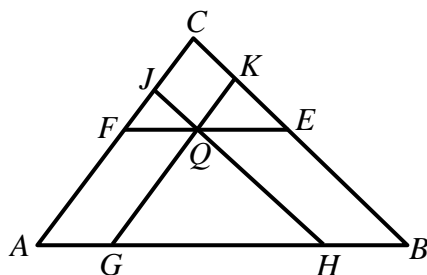
3. 已知  $R$ ， $x$ ， $y$  及  $z$  是整數且  $R > x > y > z$ 。若  $R$ ， $x$ ， $y$  及  $z$  滿足方程  $2^R + 2^x + 2^y + 2^z = \frac{495Q}{16}$ ，求  $R$  的值。

Given that  $R$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  are integers and  $R > x > y > z$ . If  $R$ ,  $x$ ,  $y$  and  $z$  satisfy the equation

$2^R + 2^x + 2^y + 2^z = \frac{495Q}{16}$ , find the value of  $R$ .

4. 在圖一， $\triangle ABC$  內任選一點  $Q$  作三條分別平行於角邊的直線，其中  $FE \parallel AB$ ， $GK \parallel AC$  及  $HJ \parallel BC$ 。 $\triangle KQE$ ， $\triangle JFQ$  及  $\triangle QGH$  的面積分別是  $R$ ， $9$  及  $49$ 。若  $\triangle ABC$  的面積是  $S$ ，求  $S$  的值。

In Figure 1,  $Q$  is an interior point of  $\triangle ABC$ . Three straight lines passing through  $Q$  are parallel to the sides of the triangle such that  $FE \parallel AB$ ,  $GK \parallel AC$  and  $HJ \parallel BC$ . Given that the areas of  $\triangle KQE$ ,  $\triangle JFQ$  and  $\triangle QGH$  are  $R$ ,  $9$  and  $49$  respectively. If the area of  $\triangle ABC$  is  $S$ , find the value of  $S$ .



圖一

Figure 1

